УДК 517.925

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В. А. Бельский

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Различные задачи естествознания и практики приводят исследователя к необходимости моделирования реальных процессов с помощью дифференциальных уравнений или систем, поскольку существенная часть законов природы описывается на языке дифференциальных уравнений. При этом, если на моделируемую систему оказывается внешнее воздействие, то такая система будет неавтономной. Исследователя зачастую интересует вопрос, при каких условия полученная динамическая система будет иметь общие свойства с некоторой автономной системой. Это объясняется тем, что автономные системы, особенно двумерные, гораздо более изучены.

В данной работе мы будем опираться на теорию отражающей функции, которая подробно изложена в работах [1], [2]. Опираясь на свойства этой функции, мы делаем вывод, что системы обладают одной и той же отражающей функцией, а количество периодических решений и их начальные данные у таких систем совпадают. Такие системы называют [1] эквивалентными.

Мы ставим перед собой задачу выяснить, какие неавтономные двумерные системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X_1(t,x,y); \\ \dot{y} &= X_2(t,x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

эквивалентны системе гармонического осциллятора:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= by; \\ \dot{y} &= cx, \end{aligned} \tag{2}$$

где b и c постоянны; $bc = -w^2 \neq 0$.

Таких систем много, и мы даже не будем пытаться найти их всех. Попытаемся возмущать нашу систему (2) при помощи вектор-функции вида

$$\Delta = \left(f(t), g(t)\right)^T, \tag{3}$$

зависящей, таким образом, только от времени t. Полиномиальные возмущения, сохраняющие отражающую функцию, рассматриваются в работах [3], [4].

Согласно теории отражающей функции, чтобы данное возмущение сохраняло эквивалентность полученной системы с системой (2), функция (3) должна удовлетворять системе в частных производных:

$$\frac{\partial \Delta(t,z)}{\partial t} + \frac{\partial \Delta(t,z)}{\partial z} X(t,z) - \frac{\partial X(t,z)}{\partial z} \Delta(t,z) = 0, \tag{4}$$

где $z = (x,y)^T$.

Заменив в (4) Δ в соответствии с (3), а $X(t,z)$ – правой частью системы (2), мы приходим к линейной системе:

$$\dot{f} - bg = 0;$$
$$\dot{g} - cf = 0,$$

из которой находим:

$$\begin{aligned} f &= bA\cos\omega t + bB\sin\omega t; \\ g &= -A\sin\omega t + B\cos\omega t, \end{aligned} \tag{5}$$

где A и B – произвольные константы.

Возмущая исходную систему (2) функциями вида $\alpha(t)\Delta(t)$, где $\alpha(t)$ – произвольная непрерывная нечетная вектор-функция, а $\Delta(t)$ определяется соотношениями (5), мы не выводим нашу систему гармонического осциллятора из ее класса эквивалентности. Таким образом, искомую систему (1), эквивалентную системе гармонического осциллятора (2), мы получили в виде

$$\dot{x} = by + \alpha_1(t)(bA\cos\omega t + bB\sin\omega t);$$
$$\dot{y} = cx + \alpha_2(t)(-A\sin\omega t + B\cos\omega t).$$

Системы, эквивалентные системе гармонических колебаний, изучались также в работе [5].

Литература

1. Мироненко, В. И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В. И. Мироненко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.
2. Мироненко, В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В. И. Мироненко. – Минск : Университетское, 1986. – 76 с.
3. О построении дифференциальных полиномиальных уравнений первого порядка, эквивалентных заданному в смысле совпадения отражающей функции / В. А. Бельский // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 1. – С. 13–20.
4. Бельский, В. А. О полиномиальных возмущениях уравнения Абеля, не изменяющих отражающей функции / В. А. Бельский, В. И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 79–85.
5. Вареникова, Е. В. О периодических решениях неавтономных двумерных дифференциальных систем / Е. В. Вареникова // Вестн. Гродн. гос. ун-та им. Я. Купалы. Сер. 2. – 2011. – № 1. – С. 20–23.