

## НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗЛОЖЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

О. Н. Шабловский

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
кафедра «Техническая механика»*

В докладе представлена структура изложения основных вариационных принципов динамики в курсе «Теоретическая механика» для студентов машиностроительных специальностей технического университета. Сформулируем основные положения доклада.

1. Содержание теоретической механики строится на базе некоторых основных положений, принимаемых за аксиомы. Положения, которые могут быть приняты за такие аксиомы, называют принципами или основными законами механики. Основное назначение принципа механики – выделение действительного состояния (равновесия или движения) механической системы под действием заданных сил из всех состояний, допускаемых наложенными на точку связями и называемых кинематически возможными. Принципы механики, устанавливающие какое-либо общее свойство движения для каждого момента времени, называются дифференциальными. Принципы, которые справедливы только для конечного промежутка времени, называются интегральными. Например, законы Ньютона и принцип Даламбера–Лагранжа являются дифференциальными принципами, а закон сохранения энергии – интегральный принцип. Вариационными называются те принципы, которые устанавливают какое-либо свойство истинного движения, отличающего его от всех других воображаемых движений, допускаемых связями и удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, характерным для данного принципа. Невариационными являются принципы, в которых никакого сравнения с допустимыми движениями не делается.

Принцип Гамильтона–Остроградского следующий: при перемещении консервативной системы, подчиненной идеальным голономным связям, из одного заданного положения в другое заданное, истинное движение отличается от всех других кинематически допустимых движений, происходящих за тот же самый промежуток времени, тем, что для этого движения действие, по Гамильтону, имеет стационарное значение. Этот принцип выделяет действительное движение механической системы при более частных предположениях относительно сил и связей, чем принцип Даламбера–Лагранжа. По сравнению с принципом Гамильтона–Остроградского принцип наименьшего действия является более узким. Принципу наименьшего действия Мопертюи–Лагранжа можно дать следующую формулировку: при перемещении консервативной системы, подчиненной идеальным голономным и стационарным связям, из одного заданного положения в другое заданное, истинное движение отличается от всех других кинематически допустимых движений, совершающихся с той же полной энергией, тем, что для него действие, по Лагранжу, имеет минимум. Известно, что принцип Даламбера–Лагранжа позволяет получить уравнения движения системы при любых голономных связях. Что касается неголономных систем, то их уравнения движения можно составить лишь для случая неголономных связей, линейных относительно скоростей. Существует принцип наименьшего принуждения Гаусса, позволяющий установить уравнения движения системы как при голономных, так и любых неголономных идеальных связях. Таким образом, принцип Гаусса является одним из наиболее общих принципов механики.

2. Рассмотрение вариационных принципов динамики как аксиоматических положений позволяет выделить действительное движение механической системы из всего множества кинематически возможных при тех или иных предположениях относительно наложенных на систему связей и действующих на систему сил. Определение действительных движений является одним из главных назначений принципов динамики. Между тем принципы могут быть рассмотрены и как аксиоматические положения, устанавливающие свойства движения, происходящего в действительности. Например, принцип Даламбера–Лагранжа утверждает равенство нулю суммы элементарных работ активных сил и сил инерции на возможных перемещениях, принцип Гаусса – экстремальность принуждения в любой момент времени в действительном движении. Интегральные вариационные принципы утверждают стационарность значения соответствующим образом построенного интегрального функционала в действительном движении механической системы между двумя ее состояниями. Итак, вариационные принципы отличаются друг от друга не только широтой предположений относительно связей и сил, но и позволяют выявить свойства действительного движения механической системы. Например, сопоставим принципы Гаусса и Даламбера–Лагранжа: эти принципы хотя и сформулированы при одинаковых предположениях относительно связей и сил, однако устанавливают свойства движения неодинакового содержания. Значит, эти принципы не могут быть совместимы в целом во всех отношениях. Речь может идти лишь о том, какой из этих принципов обладает большей общностью в смысле возможностей применительно к составлению уравнений движения механических систем, и в этом отношении следует сравнивать различные принципы механики.

3. Дифференциальные принципы формулируются при одинаковых предположениях относительно связей и сил и с некоторыми оговорками эти принципы являются равноценными при выделении действительного движения из множества кинематически возможных, причем в условиях для выделения действительного движения находит отражение способ варьирования, принятый согласно принципу. Интегральные вариационные принципы сформулированы при более жестких предположениях относительно связей или сил по сравнению с соответствующими предположениями в принципах Даламбера–Лагранжа, Журдена и Гаусса. Наибольшей общностью из интегральных принципов обладает принцип Остроградского, в котором допускается произвольность сил, действующих на механическую систему. Во всех других интегральных принципах предполагается, что силы являются потенциальными. Однако эти менее общие принципы позволяют получить более четкие сведения о свойствах действительного движения: каждый из них утверждает, что в действительном движении такой вполне определенный динамический показатель движения, как действие, принимает стационарное значение. Более того, в действительном движении это действие при дополнительных условиях может принять и экстремальное (наименьшее) значение.

4. Для иллюстрации основных положений теории полезны следующие задачи. Вычисление действия, по Гамильтону, для двух вариантов: точка движется в отсутствие силовых полей и проходит через два фиксированных положения; точка совершает свободное гармоническое колебание под действием упругой силы. Движение точки по инерции на поверхности гладкой сферы. Движение тяжелой материальной точки без начальной скорости по гладкой наклонной плоскости. Анализ условий, при которых действие по Гамильтону достигает минимум. Вывод дифференциального уравнения вращения тела вокруг неподвижной оси на основе принципа Гамильтона–Остроградского.