

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОНСЕРВАТИВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В ДИСТАНЦИОННОМ ОБУЧЕНИИ

Д. В. Комнатный

Учреждение образования

*Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого
Кафедра «Теоретические основы электротехники»*

Дистанционное обучение требует, в том числе, чтобы электронные учебные материалы по теоретическим основам электротехники (ТОЭ) имели современное содержание. Особенно это актуально для раздела «Нелинейные электрические цепи», так как в настоящее время в теории нелинейных колебаний получено большое число важнейших результатов. Эти достижения привели к радикальным изменениям в нашем миропонимании. Поэтому курс ТОЭ не может оставаться в стороне от магистрального пути развития науки.

Программа по ТОЭ предусматривает изучение главным образом вынужденных колебаний в нелинейных электрических цепях переменного тока. Некоторое внимание уделяется колебаниям в консервативных электрических цепях. Изучение последних на уровне современных достижений теории нелинейных колебаний, согласно классической книге А. А. Андропова, А. А. Витта и С.Э. Хайкина «Теория колебаний» возможно путем применения методов гамильтоновой динамики. Математический аппарат этой теории хорошо развит и продолжает развиваться. С его помощью уже обнаружены представляющие значительный интерес режимы движения нелинейных систем. Это говорит о плодотворности гамильтоновых методов и в теории электрических цепей. Примечательной является также возможность получения этими методами точных решений задач о движении нелинейных систем в косвенной форме наряду с качественным анализом этих движений. В то же время вынужденные колебания в электрических нелинейных цепях изучаются в курсе ТОЭ различными приближенными методами: гармонической линеаризации, гармонического баланса, коллокаций и другими.

Следовательно, ознакомление студентов с методом уравнений Гамильтона в теории электрических цепей на простых примерах является оправданным и методически полезным.

В качестве примера в докладе рассматриваются колебания в консервативной системе, состоящей из нелинейной катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора емкостью C . Предполагается, что вебер-амперная характеристика катушки может быть аппроксимирована кубической параболой $\Phi = ai^3$. Процессы в цепи описываются уравнением, записанным на основе второго закона Кирхгофа

$$\frac{1}{C} \int i dt + w \frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

В указанной монографии показано, что это уравнение может быть приведено к форме Гамильтона. Обобщенной координатой является заряд q на обкладках конденсатора, а в качестве аналога обобщенного импульса выступает величина

$p = wai^3 = wa \left(\dot{q} \right)^3$, где w – число витков в катушке. Выразив из выражения для аналога

обобщенного импульса производную заряда по времени, получаем функцию

$\Psi(p) = \frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{wa}}$. Функция Гамильтона для данной колебательной системы имеет вид

$$H(p, q) = \int \Psi(p) dp + \frac{q^2}{2C} = \frac{3}{4\sqrt[3]{wa}} p^{\frac{4}{3}} + \frac{q^2}{2C}. \quad (1)$$

Известным из аналитической механики способом из (1) получается уравнение Гамильтона-Якоби для аналога действия S для данной электрической цепи.

$$\frac{3}{4\sqrt[3]{wa}} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^{\frac{4}{3}} + \frac{q^2}{2C} = h, \quad (2)$$

где h – начальное значение энергии, запасенной в емкости, Дж.

Уравнение (2) допускает разделение переменных, после чего его решение находится путем квадратуры

$$S = \int \sqrt[4]{\frac{64}{27} wa} \sqrt[4]{\left(h - \frac{q^2}{2C} \right)^3} dq + C_1. \quad (3)$$

Уравнение для определения зависимости заряда конденсатора от времени имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial h} = t - t_0, \quad (4)$$

где t – текущий момент времени, с; t_0 – начальный момент времени, с.

После подстановки (3) в (4) и осуществления дифференцирования под знаком интеграла получается косвенное выражение зависимости заряда конденсатора от времени

$$\frac{3}{4} \sqrt[4]{\frac{64}{27} wa} \int \frac{1}{q_0 \sqrt[4]{h - \frac{q^2}{2C}}} dq = t - t_0. \quad (5)$$

В теории цепей большой интерес представляет изменение тока в цепи во времени. Связь значений тока в цепи и заряда на обкладках конденсатора может быть получена из закона сохранения энергии. По закону электромагнитной индукции энергия магнитного поля в катушке

$$W_m = w \int \frac{d\Phi(i)}{dt} i dt = w \int i \frac{\partial \Phi(i)}{\partial i} di.$$

Тогда выражение закона сохранения энергии

$$w \int i \frac{\partial \Phi(i)}{\partial i} di + \frac{q^2}{2C} = h.$$

Последнее выражение после подстановки выражения вебер-амперной характеристики и интегрирования принимает вид

$$wai^4 + \frac{q^2}{2C} = h.$$

Аналогично может быть выполнен анализ процессов в электрической цепи, состоящей из катушки индуктивности с индуктивностью L и конденсатора с сегнетоэлектрическим изолятором. В этом случае свойства конденсатора удобно описывать не кулон-вольтной характеристикой, а зависимостью емкости конденсатора от накопленного в нем заряда.