РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАЗМНОЖЕНИИ БАКТЕРИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНЖЕНЕРНОГО ПАКЕТА MATHCAD

Я. В. Янкина

Белорусский национальный технический университет, г. Минск

Научный руководитель Н. А. Кондратьева

При исследовании явлений природы, решении множества задач физики, химии и биологии, а также иных наук не всегда предоставляется возможность напрямую определить непосредственную зависимость величин, которые описывают тот или иной эволюционный процесс. Но есть возможность определить связь среди величин (функций) и скоростями их изменения относительно других (независимых) переменных величин, т. е. найти уравнения, в которых неизвестные функции входят под знак производной. Данные уравнения называют дифференциальными. Модели, базирующиеся на основе дифференциальных уравнений, применяются с целью отображения динамики довольно многих популяций (к примеру, микробных), у которых процессы зарождения и гибели особей можно рассматривать непрерывными процессами.

В благоприятных для размножения условиях находится некоторое количество $x0$ бактерий. Из эксперимента известно, что скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. Необходимо найти зависимость роста числа бактерий с течением времени.

Обозначим через $x(t)$ количество размножающихся бактерий в момент времени t: $x(0) = x0$. Отвлекаясь от того, что численность может измеряться только целыми числами, считаем, что $x(t)$ изменяется во времени непрерывно дифференцируемо. В таком случае скорость размножения есть производная от функции $x(t)$; поэтому указанный в условии задачи биологический экспериментальный закон дает возможность составить дифференциальное уравнение размножения бактерий:

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t),\ k > 0, \qquad (1)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Наша задача свелась к решению несложной математической задачи: найти решение $x = x(t)$ уравнения (1), для которого $x(0) = x0$.

Поскольку $x(t) > 0$, разделив обе части уравнения (1) на $x(t)$, получим:

$$\frac{d}{dt} = (\ln x(t)) = k.$$

Отсюда получаем:

$$\ln x(t) = kt + C1,$$

где $C1$ – произвольная постоянная; будем считать, что $C1 = \ln C$, $C > 0$.

Из (2) имеем:

$$x(t) = Ce^{kt}. \qquad (3)$$

Чтобы из множества функций (3) выделить ту, которая описывает процесс размножения бактерий, воспользуемся условием $x(0) = x0$, откуда $x0 = C$. Окончательно получим:

$$x(t) = x0, \tag{4}$$

т. е. при благоприятных условиях увеличение бактерий с течением времени происходит согласно экспоненциальному закону.

Экспоненциальный рост – возрастание величины, когда скорость роста пропорциональна значению самой величины. Для любой экспоненциально растущей величины, чем больше значение она принимает, тем быстрее растет. Экспоненциальная кривая никогда не уходит в бесконечность за конечный промежуток времени.

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy(x)}{dx} = ky(x) \tag{5}$$

описывает разнообразные процессы и зависимости между величинами, в которых искомая функция $y = y(x)$ может быть не только положительной.

Решениями уравнения (5) являются те и только те функции $y = y(x)$, производная которых в каждой точке отличается от значения функции в этой точке лишь множителем k, где k – фиксированное действительное число.

Решениями этого уравнения являются все функции вида $y = Ce^{kx}$, где C – произвольное число. Никаких других решений уравнение (5) не имеет.

В программе MathCad используем функцию Odesolve, которая требует записи вычислительного блока. Он состоит из трех частей:

– ключевого слова Given (Дано);

– дифференциального уравнения и начальных или граничных условий к нему;

– функции odesolve.

Решая задачу, будем учитывать что k – коэффициент пропорциональности, следовательно, мы можем принять его за единицу.

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t)$$

и начальные условия x (0) = 1 записываются в вычислительном блоке, начинающемся директивой Given. При их записи применяется символ булева равенства = с математической панели (палитры) Boolean (Булевы операторы). Вычислительный блок заканчивается обращением к функции odesolve (рис. 1).

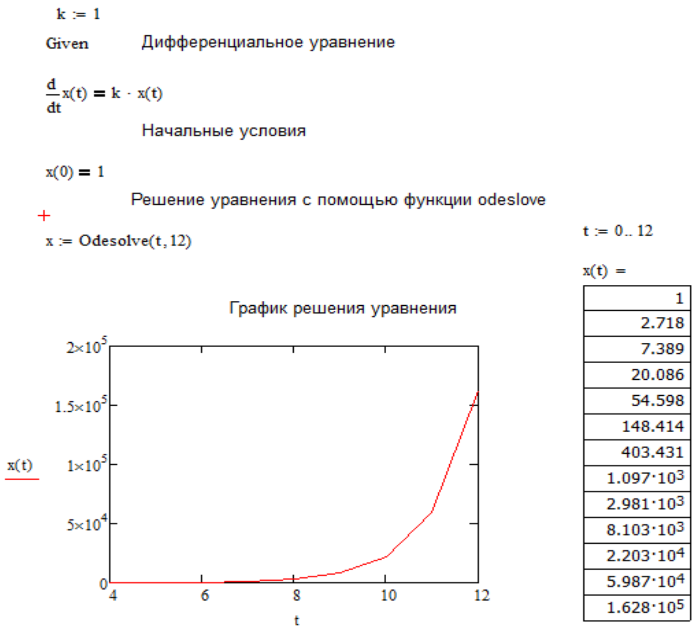


Рис. 1. Использование функции Odesolve при начальном условии $x(0) = 1$

Изменим начальное условие с $x(0) = 1$ на $x(0) = 75$ (рис. 2) и проследим за изменениями.

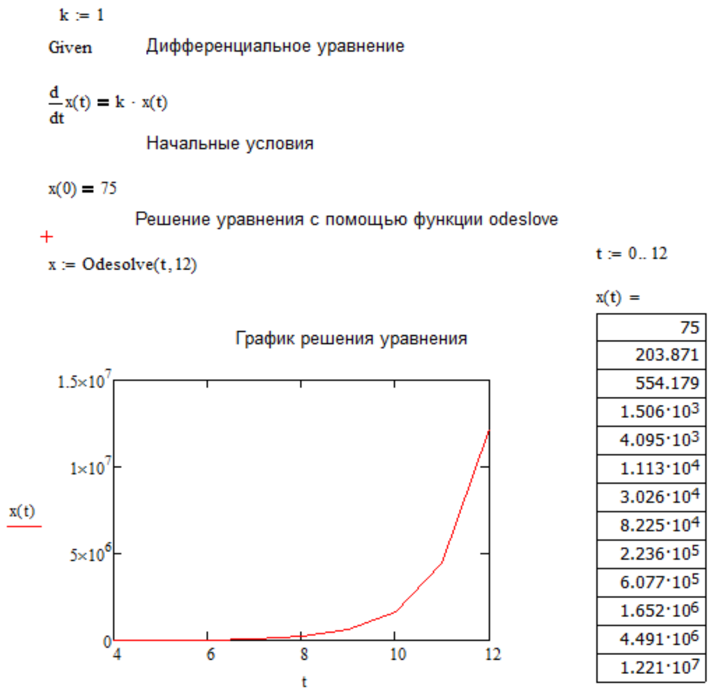


Рис. 2. Использование функции Odesolve при начальном условии $x(0) = 75$

В соответствии с нормами воздух закрытых помещений считают чистым при содержании в 1 м^3 вплоть до 2000 бактерий, таким образом, если не проветривать помещение, то за $t = 12$ ч в 1 м^3 их число будет равным 3,255·108 (рис. 3).

$k := 1$

Given

Дифференциальное уравнение

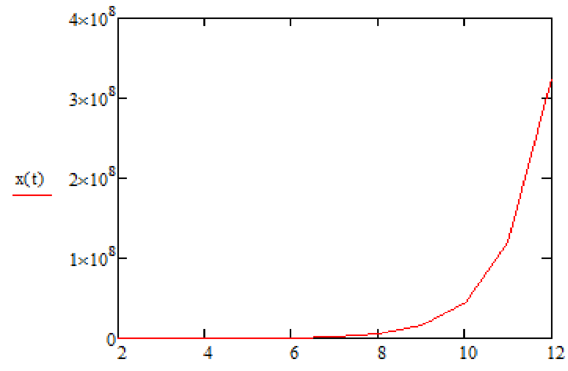
$$\frac{d}{dt}x(t) = k \cdot x(t)$$

Начальные условия

$x(0) = 2000$

Решение уравнения с помощью функция odesolve

$x := \mathrm{Odesolve}(t, 12)$



$t := 0..12$

$x(t) =$

$2\cdot10^3$
$5.437\cdot10^3$
$1.478\cdot10^4$
$4.017\cdot10^4$
$1.092\cdot10^5$
$2.968\cdot10^5$
$8.069\cdot10^5$
$2.193\cdot10^6$
$5.962\cdot10^6$
$1.621\cdot10^7$
$4.405\cdot10^7$
$1.197\cdot10^8$
$3.255\cdot10^8$

Рис. 3. Начальное количество бактерия равно 2000

Так, если объем помещения считать $V = 60$ м^3, то за время $t = 12$ ч без проветривания количество бактерий станет равным 1956·1010.

Исходя из графиков, мы можем сделать вывод об увеличении бактерий с течением времени (в данной задаче использовали время $t = 12$ ч) по экспоненциальному закону.

В период лаг-фазы (от 0 до 8 ч) бактерии приспосабливаются к новой среде обитания, и по этой причине рост пока еще не достигает максимальной скорости. В данный период у бактерий могут, к примеру, синтезироваться новые ферменты, необходимые для усвоения тех питательных элементов, которые содержатся в новой среде. Логарифмическая фаза (от 8 до 12 ч и выше) – это фаза, когда бактерии растут с максимальной скоростью, количество клеток увеличивается почти экспоненциально, а кривая роста представляет собой практически прямую линию (рис. 4).

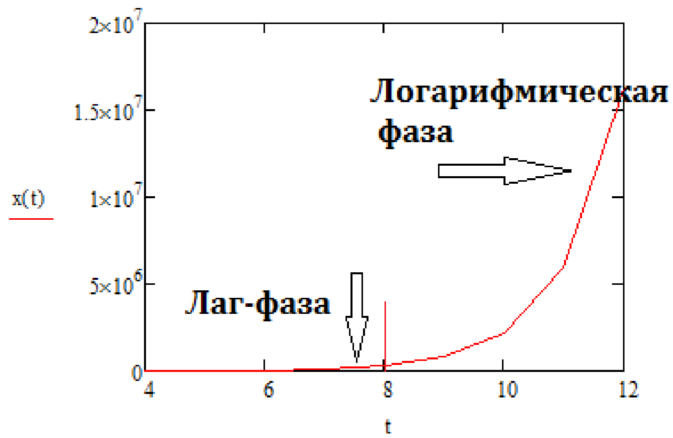


Рис. 4. Периоды размножения бактерий

Если в момент времени $t0 = 0$ количество бактерий составляет $x_1 = 1$, то к $t = 12$ ч их количество станет равным $x1 = 1{,}628 \cdot 10^5$.

При начальном количестве бактерий $x_2 = 75$ к $t = 12$ ч их количество станет равным $x_2 = 1{,}221 \cdot 107$, что на $120{,}472 \cdot 10^5$ больше (в 75 раз), чем при начальном количестве $x_1 = 1$.

Литература

1. Алексеев, Е. Р. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLA 7, Maple 9 / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. – М. : НТ Пресс, 2006.
2. Дьяконов, В. П. MathCad 2001 : учеб. курс / В. П. Дьяконов – СПб. : Питер, 2001.
3. Очков, В. Ф. MathCAD 14 для студентов, инженеров и конструкторов / В. Ф. Очков – СПб. : БХВ-Петербург, 2007. – 368 с.